Université Mohammed 1er, Oujda — Année 2015/2016

ENSA d'Al-Hoceima — Semestre 1,

CP-II, — Analyse 3

Devoir surveillé 1

Mardi 22 décembre 2015 , durée : 1h30.

Exercice 1 : (5points)

Notons $A(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications affines sur $\mathbb{R}$.

1- Pour $f(x) = ax + b$ et $g(x) = a'x + b'$ dans $A(\mathbb{R})$, on pose :

$$\begin{cases} d(f,g) = 2 & si \ a \neq a' \\ d(f,g) = 1 & si \ a = a' et \ b \neq b' \\ d(f,g) = 0 & si \ f = g \end{cases}$$

2pt Montrer que d est une distance sur $A(\mathbb{R})$.

2- On pose : $N_1(f) = |a| + |b|$ et $N_2(f) = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$

3pt Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $A(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : (7points)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{y}}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

0,5 1- Déterminer le domaine de définition D_f.

1pt	2- Etudier la continuité de f sur D_f.
1pt	3- Soit $x_0 > 0$ fixé. Etudier la dérivabilité de $f(x_0,.)$ en 0.
1,5	4- Soit $y_0 \neq 0$ fixé. Etudier la dérivabilité de $f(.,y_0)$ en 0 et en déduire $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0)$.
3pt	5- Etudier la dérivabilité de f par rapport à x et à y en (x,y) tel que $x \neq 0$ et $y \neq 0$ et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
	Exercice 3: (8points)
	Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
	1- Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :
2pt	a- $f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f_1(x,y) = f(x^2+y, y^3)$,
2pt	b- $f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f_2(x,y) = f(\cos x, \cos y)$,
2pt	c- $f_3: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f_3(x,y) = f(e^{xy}, x-y)$.
2pt	2- Déterminer la matrice jacobienne de la fonction $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par : $g(x,y) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$ avec $f(x,y) = xy$.

BONNE CHANCE